Caractérisation et modélisation de contrainte admissible en fatigue des matériaux

Emilie Miranda   Université Pierre et Marie Curie

Abstract

L'objectif de cette étude est l'estimation d'un quantile extrême dans le cas de données dichotomiques de dépassement de seuil. La méthode proposée est séquentielle et consiste à décomposer la probabilité de l'évènement rare en un produit d'évènements conditionnels. Elle se fonde sur l'utilisation de résultats sur les lois limites de dépassement de seuil.

L'endommagement en fatigue

Phénomène de fatigue : modification des propriétés d'un matériau sous l'effet de l'application répétée d'une charge, pouvant mener à la rupture.

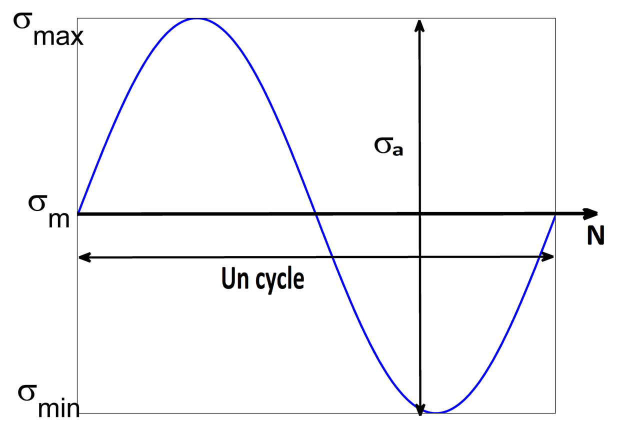

Figure 1: Application de cycles d'effort sur un matériau

Certaines pièces des turboréacteurs sont sollicitées de manière répétitive et peuvent alors s'endommager en fatigue. Il existe trois régimes de fatigue (2). Cette étude porte sur la fatigue à grand nombre de cycles ou HCF (*High Cycle Fatigue*).

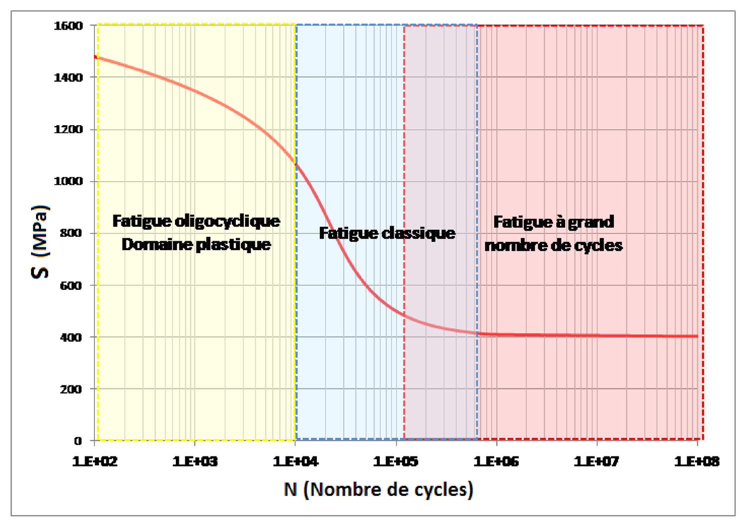

Figure 2: Schéma de principe d'une courbe de Wöhler

Objectifs

- Estimation robuste de **la contrainte minimale admissible** en HCF pour un niveau de probabilité p_0 très faible (de l'ordre de 10^{-3}).
- Mise au point d'un plan d'essais permettant de caractériser cette contrainte admissible à partir du plus petit nombre d'essais possible.

Modélisation

- N la durée de vie du matériau exprimée en nombre de cycle ;
- s, l'amplitude de la contrainte appliquée sur la pièce, exprimée en MPa ;
- Pour $\alpha \approx 10^{-3}$, la contrainte admissible au niveau α est notée s_α et est telle que :

$$s_\alpha = \underset{s}{\operatorname{argmax}} \left\{ \mathbb{P}_s(N \leq n_0) \leq \alpha \right\} \qquad (1)$$

où $\mathbb{P}_s(N \leq n_0) = \mathbb{P}(N \leq n_0 \mid S = s)$, la probabilité de rompre avant n_0 cycles sous le niveau de contrainte s

- R_{n_0} la variable aléatoire positive continue correspondant à la résistance du matériau pour une durée de vie n_0, de loi $\mathbb{P}_0$, exprimée en MPa. Elle correspond à la contrainte à laquelle le matériau rompt.

$$\mathbb{P}_{s_\alpha}(N \leq n_0) = \mathbb{P}(R_{n_0} \leq s_\alpha) \qquad (2)$$

Par la suite, R_{n_0} est notée R.
La quantité cible s_α est le quantile d'ordre α de R, variable latente :

$$s_\alpha = \underset{s}{\operatorname{argmax}} \left\{ \mathbb{P}_0(R \leq s) \leq \alpha \right\} \qquad (3)$$

Données

Données = résultats d'essais de fatigue

Un essai : application cyclique d'une contrainte sur une éprouvette jusqu'à rupture ou date de fin d'essai. Les essais sont coûteux et leur nombre doit être le plus faible possible. La valeur observée est $\min(N, n_0)$.

Information pertinente pour la variable d'intérêt R : $\mathbb{1}_{R \leq s} = \mathbb{1}_{N \leq n_0}$ (rupture ou non de l'éprouvette).

Les données sur R sont donc complètement censurées.

Méthode existante

SAFRAN utilise jusqu'à présent une méthode d'essais séquentielle qui vise à estimer la distribution de la contrainte admissible : la méthode *staircase*.

Motivations pour proposer une nouvelle stratégie :

- le *staircase* estime convenablement la tendance centrale de la contrainte, mais mal sa dispersion ;
- les estimateurs obtenus sont biaisés ;
- les estimations des quantiles extrêmes sont obtenus par extrapolation sur la distribution et manquent donc de précision.

Décomposition du problème

L'évènement $\{R \leq s_\alpha\}$ peut se décomposer en l'intersection d'évènements conditionnels. Soit une série de m évènements inclusifs $\{R \leq s_\alpha\} = \{R \leq s_m\} \subset \cdots \subset \{R \leq s_1\}$, avec $s_\alpha = s_m < s_{m-1} < \ldots < s_1$, la probabilité de rupture sous s_α se réécrit alors :

$$\mathbb{P}_0(R \leq s_\alpha) = \mathbb{P}_0(R \leq s_1) \prod_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}_0(R \leq s_{j+1} \mid R \leq s_j) \qquad (4)$$

La décomposition (4) a pour but de faire apparaître une méthode séquentielle de détermination de s_α.

p est fixé entre 20 et 30 % afin que les probabilités conditionnelles puissent être estimées à partir d'un nombre réduit d'essais, tout en limitant le nombre de seuils nécessaires à la reconstitution de α.

Protocole d'essai induit

1: Premiers essais réalisés au niveau s_1, suffisamment grand ;
2: Détermination de s_2, le quantile à $p \approx 20\%$ de la loi $\mathbb{P}_0$;
3: Essais suivants réalisés en s_2 ;
  Pour $j = 2, \ldots, m-1$:
4: Détermination du quantile s_{j+1} d'ordre p de la loi conditionnelle de $R \mid R \leq s_j$;
5: Essais réalisés sous la loi conditionnelle au niveau s_{j+1}.

Loi limite des probabilités d'excédances

Théorème 1 (Balkema et De Haan ; Pickands) *La limite de la distribution des excès renormalisés d'une variable positive est une loi de Pareto généralisée ($GPD(c, a)$) :*

$$\lim_{s \to \infty} \mathbb{P}\left(\widetilde{R} > \frac{x+s}{a} \mid \widetilde{R} > s \right) = G(x)$$

où, G est de la forme :

$$1 - G(x) = \begin{cases} (1 + \frac{c}{a}x)^{-1/c} & si\ c \neq 0 \\ \exp(-\frac{x}{a}) & si\ c = 0 \end{cases}$$

avec $\begin{cases} x \geq 0 & si\ c \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{a}{c} & si\ c < 0 \end{cases}$

Appliqué à (4) : soit $\widetilde{R} = \frac{1}{R}$,

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ x < s}} \mathbb{P}(R < x \mid R < s) = \lim_{\substack{\frac{1}{s} \to \infty \\ \frac{1}{x} > \frac{1}{s}}} \mathbb{P}\left(\widetilde{R} > \frac{1}{x} \mid \widetilde{R} > \frac{1}{s} \right) = G(x)$$

Intérêt du résultat sur la loi limite :
À mesure que les s_j diminuent, la loi conditionnelle s'approche du régime limite. Or, à l'approche du régime limite, le nombre d'observations nécessaires pour estimer la loi et le quantile d'ordre p diminue.

En effet, dans le régime limite : $\widetilde{R} = \frac{1}{R} \sim GPD(c, a_0)$, de f.d.r G et la loi conditionnelle de $\widetilde{R} | \widetilde{R} > s \sim GPD(c, a_s)$, avec $a_s = a_0 + cs$, de f.d.r G_s.
L'équation (4) se réécrit avec $\widetilde{R}$: pour une séquence de niveaux $\widetilde{s}_m > \widetilde{s}_{m-1} > \cdots > \widetilde{s}_1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(\widetilde{R} > \widetilde{s}_m) &= \mathbb{P}(\widetilde{R} > \widetilde{s}_1) \prod_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}_0(\widetilde{R} > \widetilde{s}_{j+1} | \widetilde{R} > \widetilde{s}_j) \\ &= \mathbb{P}(\widetilde{R} > \widetilde{s}_1) \prod_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}_0(\widetilde{R} - \widetilde{s}_j > \widetilde{s}_{j+1} - \widetilde{s}_j | \widetilde{R} > \widetilde{s}_j) \\ &= \bar{G}(\widetilde{s}_1) \prod_{j=1}^{m-1} \bar{G}_{\widetilde{s}_j}(\widetilde{s}_{j+1} - \widetilde{s}_j) \\ &= \left(1 + \frac{c\widetilde{s}_1}{a_0}\right)^{-1/c} \prod_{j=1}^{m-1} \left(1 + \frac{c(\widetilde{s}_{j+1} - \widetilde{s}_j)}{a_j}\right)^{-1/c} \end{aligned}$$

où $a_j = a_0 + c\widetilde{s}_j$

Le modèle est entièrement déterminé par les paramètres a_0 et c. Dans ce modèle, seuls les paramètres initiaux nécessitent d'être estimés pas des essais réalisés au niveau s_1.
À chaque étape $j = 1, \ldots, m-1$, s_{j+1} est obtenu en déterminant le quantile d'ordre p de la loi G_{s_j}, qui est complètement définie.

Modèle de mélange :
Lorsque $c > 0$, $\bar{G}$ est complètement monotone, et s'écrit comme la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité V (Bernstein (1928)), avec V une loi gamma dont les paramètres sont des fonctions de a_0 et c :

$$\forall x \geq 0, \quad \bar{G}(x) = \int_0^\infty \exp(-xy) dV(y)$$

$$\text{où} \quad dV(y) = \frac{(a_0/c)^{1/c}}{\Gamma(1/c)} y^{1/c - 1} \exp\left(-\frac{a_0 y}{c}\right) \qquad (5)$$

G s'écrit donc comme un mélange de lois exponentielles.

Simulation selon le modèle de mélange :
Pour un jeu de paramètres initiaux $a_0 = 1.5$ et $c = 0.8$, la procédure de décomposition proposée est déroulée de manière à s'assurer que le dernier seuil obtenu s_m correspond bien au quantile d'ordre α.

Pour un quantile cible au niveau $\alpha = 10^{-3}$, $s_\alpha = 469.104$, les valeurs obtenues sont :

s_m	$\bar{G}_{c,a_0}(s_m)$
470.521	9.96 $\times 10^{-4}$

s_m	$\bar{G}_{c,a_0}(s_m)$
469.292	9.99 $\times 10^{-4}$

Table 1: Quantiles obtenus par simulation selon $GPD(c, a_0)$ et selon le modèle (5)

References

[1] Balkema A. A. and De Haan L. Residual life time at great age. *Ann. Prob.*, 2(5):762–804, 1974.

[2] Pickands J. Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Stat.*, 3(1):119–131, 1975.

[3] Thorin O. On the infinite divisibility of the pareto distribution. *Scand. Actuarial J.*, 1:31–40, 1977.

[4] Feller W. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. Wiley, 1971.